Számelméleti bizonyítások

Buday Gergely
Eszterházy Károly Egyetem
Gyöngyösi Károly Róbert Campus

2017. ősz

A hárommal oszthatóság szabálya

Az általános iskolából ismert szabály szerint egy természetes szám akkor osztható 3-mal, ha a számjegyek összege osztható 3-mal. Ettől egy erősebb állítást bizonyítunk: azt, hogy egy természetes szám 3-mal vett maradéka pontosan annyi, amennyi a számjegyei összegének a 3-mal vett maradéka. Nyilvánvalóan tizes számrendszerben felírt számról van szó.

Egy természetes számot a következőképpen lehet algebrailag felírni:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$$

ahol a_i a tizes számrendszer számjegye, vagyis egy a $0 \ldots 9$ számokból, és $n \geq 0$. Ezzel felírva az állítást:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i \right) \bmod 3 = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \bmod 3$$

A jobb oldalt kivonva az egyenletből kapjuk, hogy:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) \right) \bmod 3 = 0 \bmod 3$$

Megmutatjuk, hogy nem csak az összegre, hanem annak minden egyes tagjára igaz, hogy

$$a_i \cdot (10^i - 1) \bmod 3 = 0 \bmod 3$$

A négyjegyű függvénytáblázatból ismert összefüggés szerint, ha $i \geq 1$, akkor

$$10^i - 1 = (10 - 1) \cdot \sum_{k=1}^{i} 10^{i-k} \cdot 1^k = 9 \cdot \sum_{k=1}^{i} 10^{i-k} \cdot 1^k = 9 \cdot C_i$$

ahol C_i természetes szám, vagyis minden $i \geq 1$-re

$$a_i \cdot (10^i - 1) \bmod 3 = a_i \cdot 9 \cdot C_i \bmod 3 = 0 \bmod 3$$

mivel egy 9-cel osztható szám osztható 3-mal is, ennek pedig 0 a maradéka 3-mal osztva. Az $i = 0$ esetben nem végezhető el ez az átalakítás, de itt

$$a_i \cdot (10^i - 1) \bmod 3 = a_0 \cdot (10^0 - 1) \bmod 3 = a_0 \cdot (1 - 1) \bmod 3 = a_0 \cdot 0 \bmod 3 = 0 \bmod 3$$

szintén teljesül. Tehát, ekvivalens átalakításokat végezve egy igaz állításhoz jutottunk. Ha az átalakításokat visszafelé végezzük el, akkor pedig a kívánt állítást bizonyítottuk. ■